§.3 Le Chaos et l'étude des populations des êtres vivants.

L'Homme a toujours eut la curiosité de savoir quelle sera la population humaine de telle année à venir. Même chose pour les écologistes qui surveillent les populations animales et végétales. L'étude de la croissance d'une population est extrêmement importante pour l'homme afin de déterminer comment préserver l'écosystème et les cycles de la vie. La croissance d'une population animale dépend d'un grand nombre de facteurs. Les facteurs les plus importants sont la nourriture, l'eau, et les prédateurs. Mais en réalité c'est beaucoup plus compliqué que ça. Le monde à une biodiversité surprenante, avec des millions d'espèces qui dépendent les unes des autres pour former un des systèmes les plus complexes: Le cycle de la vie. Il y a des exemples bien connus d'espèces qui fleurissaient à une époque mais à une autre ne se vit plus. La croissance d'une population animale dépend de leur environnement, environnement qui d'après ce qu'on a vu résulte complètement chaotique. Alors déterminer quel va être la population d'une espèce dans un temps futur est impossible due à la nature chaotique de ce système qui dépend d'autant de paramètres et aussi d'autres phénomènes imprédictibles comme les épidémies, climat, prédateurs et même de phénomènes géologiques et astronomiques comme des volcans et météorites! Bref l'étude d'une seule population et aussi compliqué qu'étudier les variations des températures des pôles. Les écologistes ont essayé de modéliser les croissances d'une population animale avec les mathématiques. Ils ont tenté de modéliser une population dans des conditions limitées où l'espèce est isolée (pas de prédation), sans contrainte territoriale ni alimentaire sans risques d'épidémies ni météorites. Avec ses conditions on peut appliquer le modèle le plus simple en démographie : le modèle malthusien. Où:

Population nouvelle = facteur de croissance x population ancienne

Ainsi si la population initiale est de 1000 individus et que le taux de croissance est de 15% par ans alors la population l'année suivante va être de 1150 individus. Mais ce modèle en réalité est beaucoup trop simple car la population croit de manière linéaire. Dans la nature même les populations bactériennes les plus simples ne respectent pas cette formule mathématique. Alors les écologistes ont introduit un facteur de freinage qui dans ce cas résume toutes les dures réalités pouvant se trouver au sein d'une population. La nouvelle formule est

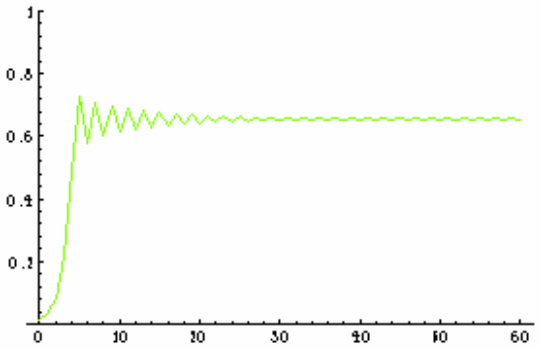
Population nouvelle = facteur de croissance x population ancienne x (1 - ancienne population)

Dans des termes plus mathématiques la formule est aperçue comme une forme récursive où la population nouvelle X_{n+1} est donnée par la population ancienne X_n relié au facteur de croissance *r* qui est toujours positive :

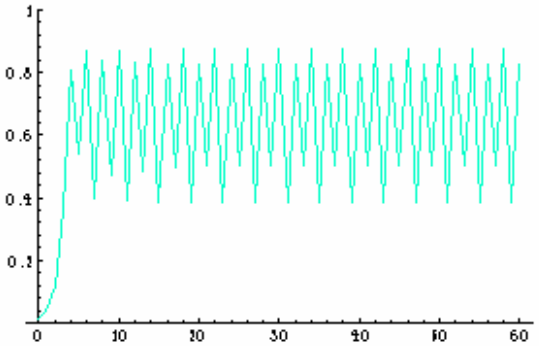
$$X_{n+1} = r X_n (1 - X_n)$$

Cette équation est appelée formule logistique ou aussi dynamique de Verhultz. Le facteur de croissance *r* est très important car la valeur de cette constante va déterminer l'évolution de la population. Ce facteur de croissance r est en effet le facteur de fécondité de l'espèce et cette valeur est positive est basse (entre zéro et 5). Le biologiste australien Robert May fut un des scientifiques qui a bien étudié cette équation logistique. A l'aide de cette formule R. May s'est rendu compte de beaucoup de caractéristiques intéressantes du chaos, surtout il a trouvé pour quelles valeurs différentes de la fécondité *r* le modèle devenait compliqué et la prédictibilité impossible. Il à découvert que pour des taux de fécondités inférieurs à un, la population *X* tendait à diminuer rapidement et après un moment à inévitablement s'éteindre (d'où la préoccupation de certains pays européens qui ont des taux très proches à un). Si le taux de natalité *r* reste modéré entre 1 et 3, alors la population va au début croître puis un temps après va se stabiliser à environ 66% de la valeur de X initiale, on voit ceci dans le graphique (graphique 1) au-dessous qui montre la population en fonction du temps pour un facteur de fécondité entre 1 et 3. En effet cette valeur de 66% est considérée comme un point attracteur car pour n'importe quelle valeur initiale de la population possédant une fécondité entre 1 et 3, la population finale (lorsque le temps tend vers l'infini) convergera toujours vers la même valeur 66%. May à ensuite augmenter la valeur de r et a vu que pour r supérieur à 3, la population après un certain temps commençait à osciller entre deux valeurs considérablement écartées d'un an à l'autre de manière périodique. Il y eut donc une bifurcation! On voit ceci dans le deuxième graphique (graphique 2) où ce qui avant était 66%, maintenant oscillait périodiquement entre 60% et 70%. Quand même, dans les deux premiers graphiques, l'élément déterministe d'ordre est évident et le chaos n'est pas présent. Un deuxième bifurcation apparaissait lorsque r dépassait la valeur de 3,45 donnant naissance à une double périodicité qu'on peut apprécier dans le troisième graphique (graphique 3). L'oscillation qui avant était double, pour des valeurs de r supérieur à 3,45, devenait quadruple (la population prend successivement quatre valeurs différentes qui revenait avec une période de quatre ans). Pour la surprise de May lorsque le taux dépassait la valeur de 3,47 la phase déterministe périodique disparaissait complètement laissant la place à un régime chaotique comme on peut bien le voir au quatrième graphique (graphique 4).

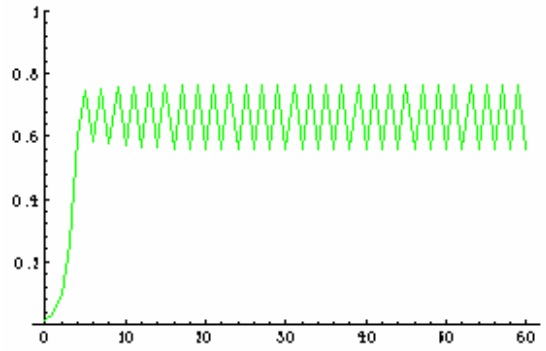
Graphique 1:



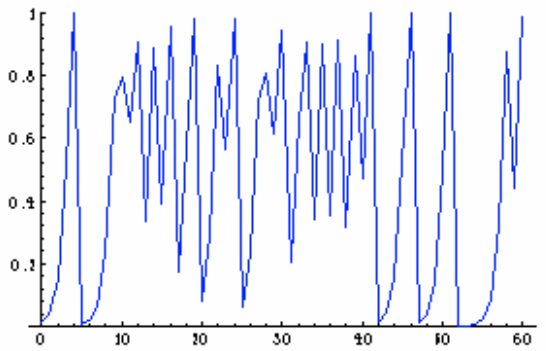
Graphique 3:



Graphique 2:

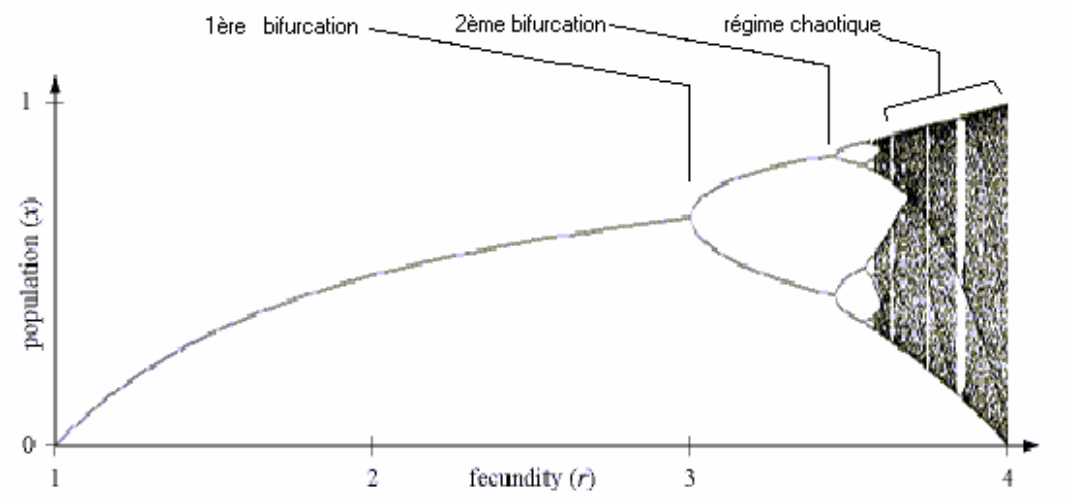


Graphique 4:



May a vu l'importance du facteur de fécondité r, étant donné que le chaos peut surgir dans un système en jouant avec les valeurs d'un seul paramètre. May à eut la majestueuse idée de mettre ce système en phase-plan où au lieu de tracer plusieurs graphiques de l'évolution de la population en fonction du temps, il traça l'évolution de la population en fonction des différentes valeurs du facteur de fécondité r afin de mieux visualiser les bifurcations et le collapsus en vers le chaos. La figure trouvée est appelée diagramme de bifurcations car elle montre les différentes valeurs de *X* en fonctions de *r* et les passages entre ses différents régimes. Sur le diagramme on voit bien que la population *X* varie entre 0 et 1 par des motifs de simplifie, où 0 correspond à l'extinction de la population et 1 la population maximale pouvant être atteinte dans les conditions données.

Le diagramme des Bifurcations:



Cette figure nous montre bien comment s'effectue l'évolution d'un système déterministe dans un système complexe chaotiques. Au fur et a mesure que le paramètre *r* augmente plus et plus bifurcations apparaissent donnant naissances au début à 2 périodes, puis 4, puis 8, puis 16…