LES FRACTALES NATURELLES : LE CHAOS

Le mot « chaos » peut être interprété de plusieurs manières. Selon quelques religions et croyances ce mot désigne l'extinction de la vie, la destruction, et l'apocalypse. Scientifiquement le terme « chaos » implique une idée totalement différente mais magnifique : le désordre et l'aléatoire. Dans ce même contexte scientifique, l'adjectif « chaotique » est attribué à un système ou phénomène qui sont impossible à prévoir et donc ne semblant suivre aucune loi mathématique, physique ou biologique. Tout système aléatoire ou erratique peut être décrit comme chaotique.

§.1 La notion du chaos.

Depuis Newton, les scientifiques ont toujours eut l'idée de décrire parfaitement la nature à travers des théorèmes dictés par des formules et équations mathématiques. Vers la moitié du XXème siècle tout semblait aller dans cette direction. Nous pouvons prédire scientifiquement avec ponctualité beaucoup de choses tel que des éclipses à la seconde prés, la vitesse instantanée d'un satellite ou d'une voiture ou les températures et climats des différentes régions du globe. La plupart de nos théories sont basées sur le concept de la linéarité. Un système possédant une linéarité est un système dont ses effets physiques sont directement proportionnels aux causes. Par exemple si on applique deux fois l'intensité d'une force (en tapant) à une balle de billard, donc la vitesse sera le double que si on avait appliqué une fois l'intensité de la force. La plupart des formules de nos jours sont des formules qui se fondent sur la linéarité physique. Mais est ce que tout dans la physique peut être linéaire? La réponse est NON. Pire encore, presque rien dans la nature n'est exactement linéaire! Ceci peut être vu dans n'importe quelle expérience.

Par exemple les lois décrivant la chute d'une pierre par l'attraction terrestre peut être donnée par les formules de Newton. Si on compare les résultats théoriques donnés par les formules, avec les résultats expérimentaux du système physique, on remarque qu'il y a un faible écart entre ces deux résultats. Cela ne veut pas dire que les formules de Newton sont fausses mais plutôt incomplètes. Elles sont incomplètes car elles ne prennent pas en compte les paramètres qu'on nous enseigne à négliger en lycée ou à l'université, telle que la friction de surfaces, la poussée d'Archimède, la direction du vent, les fluctuations de la densité de l'air et même les tensions et contraintes internes de l'objet. La négligence de ces paramètres entraîne la non-linéarisation du système étudié. Les formules de Newton sont linéaires mais les conditions expérimentales ne le sont pas.

L'idée de la physique et des autres sciences comme la météorologie et l'astronomie est de connaître le futur d'un état physique avec les données du présent. L'idée c'est de PREDIRE. Ceci ne peut pas être fait car les données connues aux présent ne seront jamais suffisamment complètes ni précises, ce qui se traduit à la fin par un résultat théorique (résultats trouvés par les formules) différent du résultat expérimental. Il est donc impossible de connaître le futur d'un état puisque les paramètres initiaux ne sont pas assez précises et donc au fond ces systèmes sont alors erratiques ou chaotiques. Si on voulait exactement savoir l'avenir du système étudie, il faudrait donc avoir connaissance de tous les paramètres physiques avec une précision infinitésimale. Le grand Mathématicien et physicien Pierre Simon Laplace avait énoncé ce problème ainsi : "*Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux*". Aucunes de ces «intelligences» ou aussi appelé «démon de Laplace» existent ; il est impossible de connaître toutes les forces s'exerçant sur un objet à un instant précis. Dans la mécanique classique, les erreurs causées par la négligence de certains paramètres sont minimes, mais il y a des phénomènes que nous allons étudier plus profondément dont le Chaos apparaît naturellement comme dans le cas de la turbulence et les études des populations. Le concept de Laplace illustre une vision très importante de la science et même des systèmes complexes (chaotiques), elle expose une vision déterministe du monde. Même si le système a une interphase chaotique, elle peut être régie par des lois déterministes! C'est ce que les scientifiques appellent «Chaos Déterministe» (CD).

Le CD regroupe deux concepts opposés, Le désordre (chaos) et l'ordre (déterminisme). Ceci n'est pas simple à visualiser mais nous pouvons mieux le comprendre à l'aide d'un exemple. Prenons une tasse de café qui à une température initiale de 80 degrés. On laisse cette tasse dans un milieu à température ambiance. Ce liquide étant plus chaud que son milieu externe va refroidir peu à peu. Son refroidissement ne va pas être linéaire dû au fait qu'il y a beaucoup de facteurs qui interviennent comme des courants de convections et autres qui compliquent énormément les prédictions. Nous connaissons bien théoriquement chaque phénomène disjoint mais lorsqu'on essaye d'interpréter théoriquement le système global en soi, ceci devient très complexe en arrivant au domaine du chaotique. Le système global de la température du café est chaotique donc il est presque impossible de prévoir avec exactitude la température instantanée du café. Nous ne pouvons pas connaître théoriquement la température exacte du café au temps $t=t'$, mais ce que nous pouvons dire c'est que cette température va diminuer au cours du temps ; Alors $(T^o)_{t=0} > (T^o)_{t=1}$ (donc la température initiale est aussi la température maximale) où $(T^o)_{t=t'}$ est la température au temps $t=t'$. Il y aura un moment à $t=t_{max}$ où la température du café sera identique â la température extérieure. Le système du café est chaotique mais déterministe puisque à la fin nous pouvons connaître la température finale lorsque t tend vers l'infinie.

Quel est alors le lien entre les fractales et le Chaos? Quel est le lien entre une image purement mathématique et un système complexe chaotique? Déjà nous pouvons relier ces deux termes avec le concept de la «complexité». Le Chaos Déterministe implique l'idée de complexité mais aussi d'ordre (déterminisme) ; c'est l'ordre dans le désordre. Les fractales avec Mandelbrot et Julia peuvent être considérés comme les images les compliquées qui ont pu être crées artificiellement par l'homme. Il faut préciser que la complexité des fractales dérive de la logique ordonnée des mathématiques. Ceci peut être considéré comme le premier véritable point en commun entre le Chaos et les fractales. Mais est ce que les systèmes complexes formés par les nuages, les courants de convection d'un liquide chauffé, les turbulences formées par un avion ou même le géant œil de Jupiter sont des fractales issues des simples et logiques règles des mathématiques ou plutôt des phénomènes impossibles d'illustrer? En fait nous allons voir dans la prochaine partie que tout système complexe chaotique peut être représenté par un ensemble de points gouverné par des équations (ou système d'équations), et que cet ensemble appelé attracteur étrange aura des caractéristiques fractales.

§.2 Le Chaos déterministe et L'attracteur étrange.

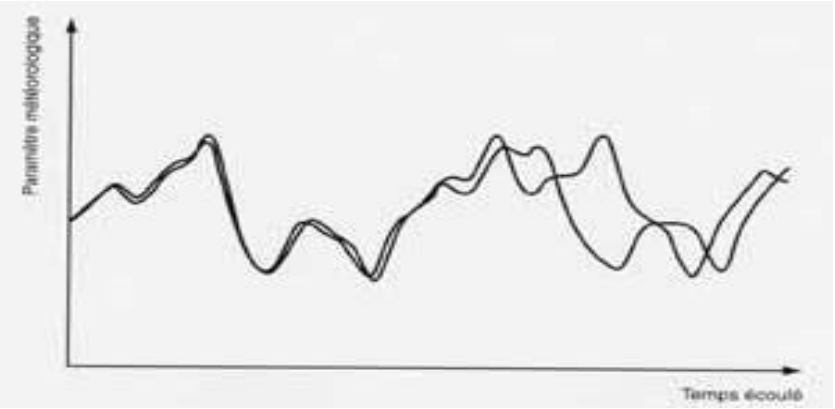
L'homme a sans cesse eut l'intérêt de prévoir le climat, de savoir si le lendemain va pleuvoir, neiger, être nuageux ou être ensoleillé. Il n'y a rien de plus compliqué que le climat qui est depuis quelques décennies est devenu l'exemple parfait du Chaos. Le premier ingrédient qui rend l'atmosphère chaotique est l'immense nombre de paramètres qui rentrent en jeu : pression, température, densité de l'air ou masse volumique de l'air, poussée d'Archimède, humidité, turbulences, reliefs du sol, vents etc. Chacun de ces paramètre sont strictement relié entre eux, comme par exemple la loi des gaz nobles $PV = nRT$ reliant la pression et le volume du gaz à la température et la quantité de mol du gaz. Il y a aussi la loi de Mariotte reliant la pression, la température et la masse volumique de l'air. La fluctuation de ces paramètres va donner une nature dynamique à l'atmosphère qui ensuite va se manifester de manière chaotique.

Beaucoup de météorologues ont tenté de modéliser le climat de la terre à l'aide d'ordinateurs pour voir si avec ses programmes il pouvait prédire des phénomènes et températures proches à venir. Un des premiers scientifiques qui a essayé ceci fut le météorologue Edward N. Lorenz dans les années soixante. Son modèle était celle d'une terre qui ne voyait jamais la nuit, où le ciel était toujours clair, et la pluie ne tombait pas. Le vent soufflait partout de manière uniforme. Le climat électronique de Lorenz changeait peu, les fronts se déplaçaient et les températures et pressions fluctuaient, mais donnait quand même origine à des cyclones qui peu de temps après disparaissaient. Le modèle prenait en compte seulement douze facteurs significatifs en météorologie. Les valeurs initiales de chaque facteur peuvent être changées pour donner lieu à des différents types de

climats. Lorenz s'est vite rendu compte qu'il pouvait prévoir certains phénomènes à courts termes mais à longs termes tout par contre était imprévisible. C'est là qu'il s'est aperçu que l'atmosphère était complètement chaotique.

Lorenz s'est accidentellement rendu compte que si on changeait de 0,001 prés la valeur d'un de ces douze paramètres, le nouveau modèle atmosphérique ne changeait pas vraiment au début, mais après un certain temps, Lorenz s'est aperçu que le nouveau modèle commençait à posséder des différents phénomènes, et des différentes données ; Les deux modèles qui au début étaient très proche (qui possédaient des paramètres quasi-identiques) à la fin différaient énormément. Les directions et vitesses du vent avaient changé drastiquement de même que les pressions, les températures et autres. Lorenz à vu que le destin d'un système chaotique dépendait largement des conditions initiales des paramètres. Une belle métaphore illustrant cette sensibilité aux conditions initiales est «l'effet du papillon» ; Lorenz avait écrit que même les battements des ailes d'un papillon d'un coté du monde pouvait engendrer un Cyclone de l'autre coté! Ceci veut dire que le Chaos a une sensibilité aux conditions initiales et que si les paramètres d'un système changent d'un millionième d'unité alors le nouveau système n'aura presque rien en commun avec le premier et donc on ne pourra jamais déterminer ni prévoir aucune caractéristique de ce nouveau système. Voici un graphique montrant la divergence de deux systèmes complexes identiques avec des paramètres différents à 0,001 prés:

Divergence de deux systèmes proche en fonction du temps:



La plupart des systèmes dynamiques tel que les mouvements de convection des fluides d'atmosphériques, sont décrites par des lois mathématiques bien connues. Le problème avec ces équations c'est qu'elles ne sont pas linéaires puisqu'elles décrivent des systèmes complexes, et dans la plupart des cas sont des équations ou systèmes d'équations différentielles très difficiles à résoudre. Si ces équations ne possèdent pas de solutions analytiques, alors comment pourrait-on déterminer les futurs étapes de ces systèmes?

Lorenz, comme d'autres, avait vu ce problème. Quand même, le météorologue voulait trouver la manière de prévoir toutes les caractéristiques du système complexe de l'atmosphère, et si ce n'était pas possible, au moins découvrir les

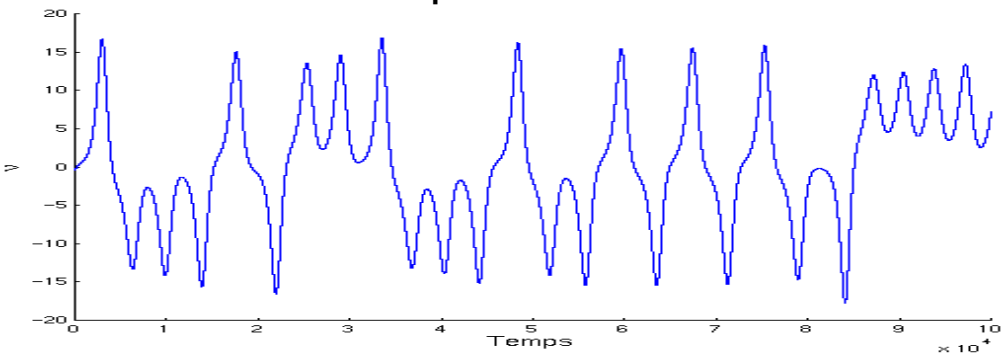
règles du Chaos. Il tenta ceci en se focalisant sur le phénomène de convection atmosphérique qui est déterminé par un système simplifié (équations de Navier-Stokes) de trois équations différentielles qui décrivent les convections des fluides. Lorenz s'est rendu compte que ce système différentiel n'avait pas de solution ce qui dans un premier temps fut problématique.

Voici le système différentiel simplifié de Navier-Stokes:

$$dx/dt = s(y - x)$$
$$dy/dt = xz + rx - y$$
$$dz/dt = xy - bz$$

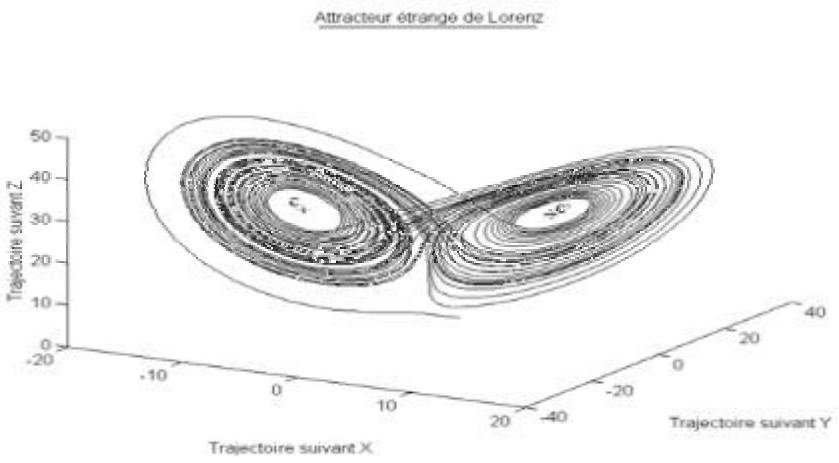
x, y et z sont des variables en fonctions du temps et s, r et b sont des paramètres que les météorologues peuvent faire varier pour donner la situation climatique désirée. Pour donner une idée du comportement chaotique de la variable x, Lorenz avait tracé les valeurs trouvées expérimentalement de la variable avec le temps et c'est ceci ce qu'il a trouvé:

Variable x en fonction du temps :



Le système d'équations de Navier-Stokes n'a pas de solutions pour la plupart des valeurs intéressantes de s, r et b. Donc Lorenz à pris des différentes valeurs pour les variables et en quelques mot a tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé [O, x, y, z] du système d'équations. Il espérait retrouver au moins une périodicité ou un point ou la courbe convergeait ou s'arrêtait. Il ne retrouva rien. Sa courbe était par contre infiniment complexe. Les points se trouvaient tous bornés formant la courbe monstrueuse qui ne possédait aucune périodicité ni répétition. Les points de la courbe traçaient une forme très particulière en double spirale tridimensionnelle, ressemblant aux ailes ouvertes d'un papillon. La figure représentait la notion du pur désordre, du chaos, puisque aucun patron se répétait ni aucune élément se stabilisait. Le système n'évoluait jamais de la même façon et la trajectoire ne se recoupe pas.

Attracteur de Lorenz :



Pour comprendre un peu plus cette figure il faut explique qu'est ce q'un attracteur? Nous allons répondre ceci à l'aide d'un exemple plus à notre niveau : le Pendule. Lorsqu'on lâche un pendule, les oscillations vont diminuer avec le temps dû aux frottements de l'air. L'angle du pendule formé avec la normale va diminuer peu à peu et si on trace la courbe de l'angle en fonction du temps on trouve que cette courbe est pseudo périodique. Elle va être sinusoïdale seulement que l'amplitude de la courbe va diminuer en fonction du temps. Nous savons qu'à la fin, les oscillations du pendule vont être complètement stoppées par les frottements de l'air. L'angle à laquelle on a lâché le pendule sera zéro par rapport à la normale. Si on trace la courbe de la vitesse en fonction de l'angle (cette courbe est dans un repère appelé phase espace car le temps n'est pas un axe) on trouvera une spirale qui est centré en zéro : on dit que zéro est un «attracteur» puisque n'importe quelle valeur on choisit pour l'angle, à la fin de l'expérience, l'angle sera zéro dû aux frottements causés par l'air.

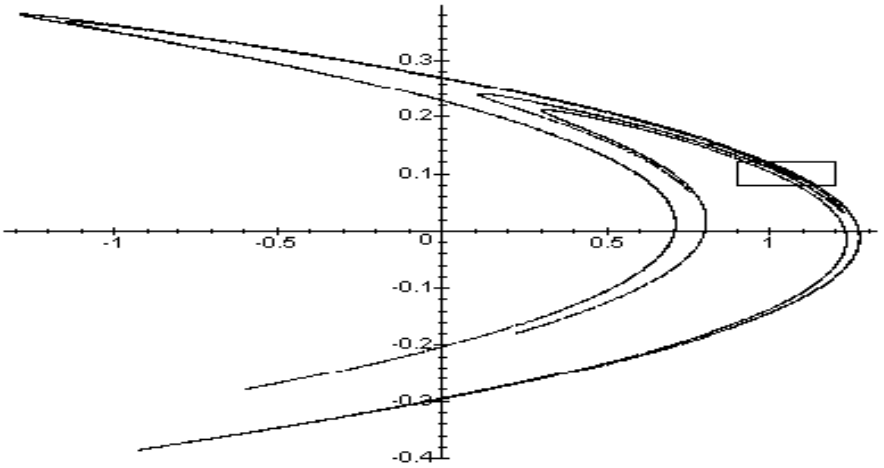
Lorenz s'est rendu compte que pour n'importe quelle valeur il prenait pour les paramètres du système mathématique de Navier-Stokes, la courbe initiale au lieu de converger vers un point ou attracteur traditionnel, elle convergeait vers la figure monstrueuse. Alors, la figure (représentée par des doubles spirales au-dessus) était un attracteur! Le destin final de toute courbe du style Navier-Stokes se trouve confiné à l'intérieur de cette figure. Avec le pendule le destin final de la courbe était déterministe puisque l'attracteur est un point (zéro) mais dans l'attracteur de Lorenz, la courbe va suivre des «chemins» qui seront toujours différents (jamais le même chemin). Lorenz a appelé cette figure «Attracteur étrange». Cette figure qui représente le système complexe des convections de l'atmosphère présente curieusement des caractéristiques d'ordre que nous allons voir maintenant.

Les points ne s'éparpillent pas de manière aléatoire, ils sont attirés de manière ordonnée vers la courbe à la forme bien définie : L'Attracteur étrange. En fait, L'attracteur de Lorenz a des caractéristiques très particulières. Elles possèdent

des infinités de chemins, chemins qui se trouvent entièrement bornés à l'intérieur de la figure. Ces caractéristiques nous rappellent bien aux fractals qui sont des figures aussi compliqués que l'attracteur étrange et aussi possède une borne ou orbite. Donc, L'attracteur étrange de Lorenz est-elle une fractale? Si l'attracteur de Lorenz est une fractale alors il doit en avoir toutes les caractéristiques. Lorenz s'est rendu compte que l'attracteur n'ayant définitivement à simple vu des patrons fractals, en possédait des caractéristiques d'auto-similarité! Elles ne sont pas évidentes, mais elles se présentent entre l'espace de chaque chemin. Dans cette figure il y a des infinités de chemins possibles, qui sont les unes à cotés des autres et qui jamais se joignent. Nous savons que l'auto-similarité fractale se trouve à des différentes échelles comme dans le cas des fractales de Mandelbrot où on retrouve à toutes les échelles après des millions de « zoom » successif la figure qui ressemble à un insecte et qui correspond à l'ensemble de point de Mandelbrot. Chez l'attracteur étrange, ce n'est pas une figure qui se retrouve répétées à toutes les échelles mais plutôt les séparations spatiaux entre les éléments de la figure (les chemins).

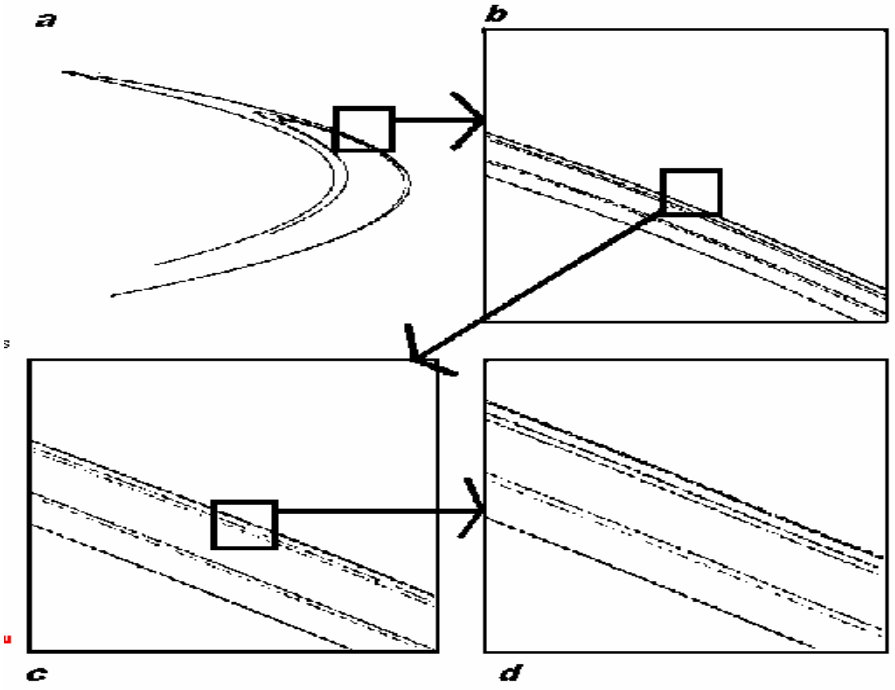
Il y a plusieurs types d'attracteurs étranges dans la nature et toutes sont reliées avec le chaos. Nous allons étudier l'auto-similarité de l'attracteur étrange de Hénon qui à été découvert par l'astronome français Michel Hénon. Pendant de longues années, notamment dans les années soixante, M. Hénon a étudié la dynamique des étoiles qui se déplaçaient autour des galaxies. Michel Hénon s'est aidé des ordinateurs pour comprendre la stabilité de leur mouvement. La propriété principale de ces systèmes est la constance de l'énergie du mouvement de ces corps célestes. En conséquence de quoi leurs mouvements chaotiques ne sont pas décrits par de simple attracteurs mais par des objets plus difficiles à analyser et visualiser. Hénon a découvert en 1970 une surface construite a l'aide d'une simple chaîne d'itération qui révèle un attracteur chaotique. Nous allons étudier que la figure sans se préoccuper des maths. En réalité l'attracteur de Hénon est très compliqué lorsqu'on le perçoit dans sa totalité (en trois dimension). C'est pour cela, qu'afin de simplifier les choses, Hénon a utilisé au début une technique appelé coupe de Poincaré qui consiste en couper l'attracteur avec un plan (on utilise le plan XY pour simplifier) et puis à trouvé une formule récursive décrivant parfaitement le plan désiré. Voici la coupe de Poincaré de l'attracteur de Hénon.

Coupe de Poincaré de l'attracteur de Hénon:



Cette figure qu'on appelle aussi la «banane» de Hénon a les mêmes propriétés et caractéristiques que l'attracteur de Lorenz. Cette «banane» est une figure qui attire tous les autres points. La figure borne les points. Pour mettre en évidence sa structure fractale, on peut effectuer des agrandissements ou zooms successifs sur l'attracteur de Hénon ce qui nous montrent une structure complexe, feuilletée, qui semble se répéter indéfiniment. Ainsi les quatre «zooms» proposés ci-dessous montrent que ce qui apparaît à l'œil comme une ligne est en fait composé de lignes plus petites, qui a leur tour sont composées de lignes encore plus petites, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. Alors si cette figure est constituée d'une infinité de courbes séparées par du «vide», vide qui après quelques zooms résulte être d'autres courbes donc la figure est alors une aire. L'attracteur de Hénon possède alors toutes les caractéristiques d'une fractale

Agrandissements successifs montrant l'auto-similarité de la banane de Hénon:



Toutes les caractéristiques de l'attracteur étrange de Hénon sont applicables à l'attracteur étrange de Lorenz qui par conséquent sera aussi une aire, possédera une auto-similarité à toutes les échelles et sera donc une fractale. On peut bien voir que les attracteurs étranges même disposant d'une complexité brutale à la fin possède aussi des éléments ordonnés tel que l'auto-similarité. Le fractal de Lorenz décrit donc un système naturel atmosphérique et plus important chaotique. L'attracteur étrange est l'image pure du Chaos et de la complexité, mais à l'intérieur nous révèle aussi que tout les systèmes erratiques naturels possèdent un ordre caché…